



FACULTAD DE CIENCIAS, UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA DE LA MATERIA CONDENSADA

TRABAJO DE FIN DE GRADO:

ONDAS DYAKONOV EN GUÍAS DE ONDA CILÍNDRICAS

Trabajo de Fin de Grado realizado por Fernando LORÉN MASTRAL para el Grado en
Física de la Universidad de Zaragoza

Junio de 2019

Supervisado por:
Luis MARTÍN MORENO
Tetiana SLIPCHENKO

“No debemos olvidar que cuando se descubrió el radio nadie sabía que sería útil en los hospitales. El trabajo era de ciencia pura. Y esta es una prueba de que el trabajo científico no debe considerarse desde el punto de vista de su utilidad directa. Debe hacerse por sí mismo, por la belleza de la ciencia, y entonces siempre existe la posibilidad de que un descubrimiento científico se convierta en un beneficio para la humanidad.”

-Marie Curie

Me gustaría dedicar estas líneas a agradecer a mi familia su infinita paciencia e infatigable apoyo a lo largo de todo mi desarrollo, tanto académico como personal. También, a mis amigos Juan, Marcos y Mateo, por haber supuesto un pilar fundamental en el transcurso de estos cuatro años.

Por supuesto, no puedo olvidarme de Luis y de Tanya. Ellos me han abierto las puertas a un mundo repleto de nuevos retos. Retos que, gracias a su incalculable ayuda, me han permitido crecer como físico y como persona.

Para la elaboración de este trabajo he sido beneficiario de la beca de colaboración del MECD para el curso 2018/2019.

Índice

Introducción	1
Objetivos	2
1. Obtención de la relación de dispersión	3
2. Aproximación cilindro \rightarrow plano	8
3. Búsqueda de una solución	10
4. Campos electromagnéticos	14
5. Búsqueda de soluciones	19
Conclusiones	24
Bibliografía	25

Introducción

Actualmente, el estudio de campos electromagnéticos en superficies constituye un área de investigación muy activa. Una de las razones por las que se está desarrollando intensamente este campo es la similitud entre la magnitud de las longitudes de ondas de los campos y el tamaño de las estructuras que presentan estas superficies. Este hecho hace que, además del propio interés teórico, sus usos y aplicaciones emerjan de manera inmediata. La principal de las aplicaciones que presentan es la implementación de este tipo de sistemas en la construcción de sensores, ya que la presencia del material que se quiere detectar produce cambios notables en los campos electromagnéticos que se propagan sobre la superficie, y por tanto, variaciones detectables [1].

Sin duda, el estudio de campos electromagnéticos en superficies ha tenido como actores principales a los metales (superficie metálica en contacto con un medio dieléctrico). Estos han sido los medios sobre los que más descubrimientos se han realizado. El establecimiento de estos campos en la superficie entre un medio dieléctrico y otro metálico constituye un tipo de modos ligados que se denominan plasmones superficiales [1, 2]. Estos presentan ciertas ventajas aunque también algunos inconvenientes respecto a su implementación en sensores. Por ser concisos, la mayor de las ventajas de las que estos plasmones gozan es la gran localización de los modos en la superficie, esto es, que los campos electromagnéticos se encuentran realmente cerca de la superficie metálica [1, 2]. Por contra, el inconveniente principal es la gran absorción que sufren hacia la superficie debida a los electrones de la banda de conducción del metal, que limita la longitud de propagación de los plasmones superficiales y ensancha espectralmente las resonancias [2]. Aunque esto no tiene por qué ser perjudicial pues a veces los picos de resonancia son muy estrechos e interesa que no lo sean tanto.

Pese a que los metales han sido el mayor foco de atención en lo que a superficies estudiadas se refiere, también se han producido avances en otro tipo de medios. Se conocía que en la interfase entre dos medios dieléctricos isótropos no existían este tipo de modos ligados, siendo esta interfase una superficie plana infinita. Sin embargo, en 1988, M.I. D'yakonov demostró la existencia de modos electromagnéticos ligados en una superficie plana infinita que separaba un medio isótropo de otro anisótropo (uniaxial) con la anisotropía en una de las direcciones contenidas en el plano [3]. Este tipo de modos ligados en medios dieléctricos presenta también ventajas e inconvenientes, pero en este caso contrarios a las que presentaban los metales. Su localización en la superficie es menor que la de los metales mientras que no presentan la absorción que estos sí, pues al trabajar con medios dieléctricos se evita el problema de la absorción de los electrones libres.

Los plasmones han sido observados en geometrías más allá de la planar (cilíndrica, esférica) [1]. Sin embargo, los modos Dyakonov únicamente han sido estudiados en superficies planas. La superficie plana infinita presenta simetría traslacional en dos direcciones (y, z) y la simetría más sencilla siguiente corresponde a la superficie cilíndrica, que tan solo tiene simetría traslacional en una dirección (z). Este Trabajo de Fin de Grado pretende abordar este problema hasta ahora inexplorado y determinar así si existen los modos Dyakonov en geometrías con superficies curvadas.

Objetivos

Este Trabajo de Fin de Grado tiene como objetivo principal la búsqueda de modos Dyakonov en la interfase entre un medio dieléctrico anisótropo y uno isótropo. Más en concreto, se centra en estudiar la superficie cilíndrica como interfase en la que se lleva a cabo la propagación de estas ondas.

Los objetivos secundarios dentro de esta visión general son varios. En primer lugar es necesario resolver las ecuaciones de Maxwell para el cilindro anisótropo y el medio isótropo que lo rodea. Habrá que estudiar también cómo se acoplan los campos internos y externos en la interfase, asegurándonos del cumplimiento de las condiciones de contorno para los campos electromagnéticos y llegando así a una relación de dispersión que nos permita analizar el comportamiento de este sistema. A modo de comprobación es conveniente tomar el límite del cilindro a un plano infinito y compararlo con el resultado conocido de los modos Dyakonov en el plano [3], teniendo así que recuperarlo.

Una vez realizadas estas comprobaciones se podrá pasar a estudiar si estos modos siguen existiendo conforme se va reduciendo el radio del cilindro o si por el contrario aparecen términos imaginarios, que corresponderían a ondas que se propagan mientras irradian energía. Es decir, habrá que caracterizar qué tipo de soluciones se deducen de la relación de dispersión obtenida.

Otro punto importante que habrá que abordar es el comportamiento de los campos eléctrico y magnético en el medio interior del cilindro, en el medio externo y, por supuesto, en la superficie cilíndrica que forma la interfase entre ambos.

Por último, para dotar de robustez y consistencia al estudio de la existencia de este tipo de soluciones, se buscarán las fronteras de estas soluciones. Es decir, se intentarán encontrar los valores límite de las diversas magnitudes de las que dependen las soluciones tales que estas ya no aparezcan.

En conclusión, lo que aquí se pretende es realizar un análisis profundo y extenso de las soluciones que aparecen al resolver las ecuaciones de Maxwell en un cilindro dieléctrico anisótropo inmerso en un medio también dieléctrico pero isótropo, y entonces, inferir si estas soluciones corresponden a modos Dyakonov o si, por contra, constituyen un tipo diferente de ondas.

1. Obtención de la relación de dispersión

En la Figura (1) se muestra una representación gráfica del sistema sobre el que trabajaremos. Se observa el cilindro anisótropo (rojo) rodeado de un medio isotrópico (blanco). Además, también se muestran los ejes cartesianos sobre un plano, que serán de ayuda al realizar la aproximación de cilindro a plano en la Sección (2), siendo el medio inferior es el medio anisótropo.

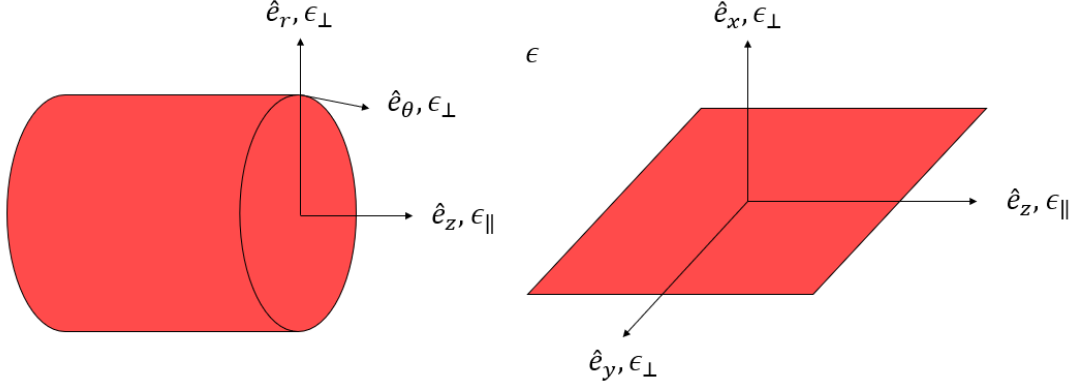


Figura 1: Esquema del sistema a estudio.

Comenzamos buscando una solución para las ecuaciones de Maxwell en coordenadas cilíndricas para un medio dieléctrico anisótropo, en concreto, uniaxial. La formulación macroscópica de las ecuaciones de Maxwell en presencia de materia y según el convenio de Gauss se muestra en la Ec. (1).

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho_f, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c} \left(4\pi\mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right). \quad (1)$$

Del hecho de que estemos considerando un medio dieléctrico y que por tanto no existan cargas libres se tiene que

$$\rho_f = 0, \quad \mathbf{J}_f = \mathbf{0}, \quad (2)$$

y de que sea uniaxial, que el tensor permitividad que relaciona \mathbf{D} y \mathbf{E} sea diagonal en coordenadas cilíndricas tal que

$$\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_\perp & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_\perp & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_\parallel \end{pmatrix}, \quad (3)$$

quedando la relación entre \mathbf{D} y \mathbf{E} de la siguiente manera

$$\mathbf{D} = \hat{\epsilon}\mathbf{E} = \epsilon_\perp (E_r \mathbf{e}_r + E_\theta \mathbf{e}_\theta) + \epsilon_\parallel E_z \mathbf{e}_z. \quad (4)$$

La elección de z como el eje extraordinario se ha realizado por sencillez, para que al llevar a cabo la aproximación a un plano se mantenga la correspondencia con el eje extraordinario de [3]. Suponemos además que el medio es no magnético, por lo que $\mu = 1$. Así, las ecuaciones de Maxwell quedan

$$\nabla \cdot (\hat{\epsilon}\mathbf{E}) = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\hat{\epsilon}}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (5)$$

Es conveniente ahora transformar estas ecuaciones en unas expresiones más manejables para cada uno de los campos (\mathbf{E} y \mathbf{H}). Realizamos aquí el desarrollo para el campo \mathbf{E} pues nos permite obtener tanto las componentes del campo eléctrico como las del campo magnético y su tratamiento es más sencillo. Partimos del Laplaciano del campo eléctrico, que se puede expresar como

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}). \quad (6)$$

Antes de simplificar la expresión anterior vamos a considerar una de las posibles polarizaciones que pueden presentar los campos eléctrico y magnético, pues la forma de actuar sobre esta expresión varía en consecuencia. En primer lugar tomaremos la polarización s, también llamada transversal eléctrica (TE) u ordinaria, que se caracteriza por que la componente z del campo eléctrico es nula: $E_z^o = 0$. Designaremos a los campos correspondientes a esta polarización con el superíndice “o”. Ahora, volviendo a la Ec. (6) podemos analizar cada término por separado:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E} &= \left(\nabla^2 E_r - \frac{E_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_r + \left(\nabla^2 E_\theta - \frac{E_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_\theta + \nabla^2 E_z \mathbf{e}_z, \\ \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}^o) &= \nabla(0) = \mathbf{0}, \\ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= \nabla \times \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) = \frac{-\hat{\epsilon}}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

En la primera línea simplemente se ha escrito el Laplaciano de una función vectorial en coordenadas cilíndricas. En la segunda, se ha hecho uso de que la componente z del campo \mathbf{E}^o es cero y por tanto $\nabla \cdot (\epsilon_\perp \mathbf{E}^o) = \nabla \cdot \mathbf{D} = 0$, por la Ec. (5). En la última línea se ha operado usando las dos últimas Ecs. de (5). La utilización de \mathbf{E}^o en lugar de \mathbf{E} en la segunda línea se debe a que el resultado ahí obtenido solo es válido para esta polarización, mientras que las expresiones de las otras dos líneas son válidas para ambas polarizaciones.

Basta con obtener una componente para deducir el resto. Para ello, usaremos los términos de la dirección radial de la Ec. (6) y que $\partial E_\theta^o / \partial \theta = -\partial(rE_r^o) / \partial r$, deducido a partir de $\nabla \cdot \mathbf{E}^o = 0$. Con esto queda,

$$\frac{\partial^2 E_r^o}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{E_r^o}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_r^o}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 E_r^o}{\partial z^2} + \frac{E_r^o}{r^2} = \frac{\epsilon_\perp}{c^2} \frac{\partial^2 E_r^o}{\partial t^2}. \quad (8)$$

Si admitimos separación de variables tal que $E_r^o(r, \theta, z, t) = R(r)\Theta(\theta)Z(z)T(t)$, podemos escribir la expresión anterior como

$$\frac{1}{R(r)} \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{3}{rR(r)} \frac{dR(r)}{dr} + \frac{1}{r^2 \Theta(\theta)} \frac{d^2 \Theta(\theta)}{d\theta^2} + \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} + \frac{1}{r^2} - \frac{\epsilon_\perp}{c^2 T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = 0, \quad (9)$$

que debe cumplirse para cualquier valor de r, θ, z y t . Esto supone que cada parte que involucra a una sola variable ha de ser constante, esto es,

$$\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = -k_z^2 \implies Z(z) \propto e^{ik_z z}, \quad (10)$$

$$\frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{d^2 \Theta(\theta)}{d\theta^2} = -n^2 \implies \Theta(\theta) \propto e^{in\theta}, \quad (11)$$

$$\frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = -\omega^2 \implies T(t) \propto e^{-i\omega t}, \quad (12)$$

donde la elección de estas exponenciales es debida al convenio típico en física.

Cabe mencionar que n ha de ser un número entero, pues se tiene que cumplir la condición de periodicidad $\Theta(0) = \Theta(2\pi)$. Ahora, introduciendo estos resultados en la Ec. (9), queda

$$\frac{1}{R(r)} \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{3}{rR(r)} \frac{dR(r)}{dr} - \frac{n^2}{r^2} - k_z^2 + \frac{1}{r^2} + \epsilon_{\perp} g^2 = 0, \quad (13)$$

donde se ha adoptado la convención de designar $g = \omega/c$. La solución de la ecuación diferencial anterior es

$$R(r) = \frac{A}{r} J_n(k_{ro}r) + \frac{B}{r} Y_n(k_{ro}r), \quad (14)$$

donde A y B son constantes, $k_{ro}^2 = \epsilon_{\perp} g^2 - k_z^2$, y J_n e Y_n son las funciones de Bessel de primera y segunda especie, respectivamente.

Hacemos constar ahora que el medio uniaxial en el que nos encontramos es un cilindro de radio R (a partir de ahora R hará referencia al radio del cilindro y no a la función utilizada en la derivación de la componente radial del campo eléctrico). Situarnos así en $r \in [0, R]$ implica que $B = 0$, pues la función de Bessel de segunda especie no puede formar parte del campo físico ya que diverge en el origen ($r = 0$) [4]. Considerando esto y tomando $A = \frac{in}{k_{ro}}$ de manera arbitraria, obtenemos

$$E_r^o = \frac{in}{k_{ro}r} J_n(k_{ro}r) e^{in\theta} e^{ik_z z} e^{-i\omega t}. \quad (15)$$

Para inferir la componente angular no tenemos más que considerar de nuevo la expresión que habíamos deducido a partir de $\nabla \mathbf{E}^o = 0$, esto es, $\partial E_{\theta}^o / \partial \theta = -\partial(rE_r^o) / \partial r$, suponiendo que la única incógnita es la parte que depende del radio r , pues se considera que las dependencias con θ , z y t son las presentadas para E_r^o , y en adelante para el resto de componentes de todos los campos. Además, para obtener las componentes del campo magnético se utilizará la tercera expresión de las Ecs. (5), considerando la dependencia con el tiempo ya mencionada y que el rotacional ha de expresarse en coordenadas cilíndricas. Esto nos proporciona las expresiones que buscábamos:

$$\mathbf{E}^o = \left(\frac{in}{k_{ro}r} J_n(k_{ro}r) \mathbf{e}_r - J'_n(k_{ro}r) \mathbf{e}_{\theta} \right) e^{ik_z z} e^{in\theta} e^{-i\omega t}, \quad (16)$$

$$\mathbf{H}^o = \frac{1}{g} \left(k_z J'_n(k_{ro}r) \mathbf{e}_r + i \frac{nk_z}{k_{ro}r} J_n(k_{ro}r) \mathbf{e}_{\theta} - ik_{ro} J_n(k_{ro}r) \mathbf{e}_z \right) e^{ik_z z} e^{in\theta} e^{-i\omega t}, \quad (17)$$

donde se tiene que $J'_n(k_{ro}r) = \partial J_n(k_{ro}r) / \partial(k_{ro}r)$. Realmente habría que sumar sobre todos los n posibles e integrar en ω y k_z , pero estas expresiones pueden estudiarse por separado para unos valores concretos de estos. Además, los campos también dependen de r, θ, z y t , pero ya se observa esta dependencia en la propia expresión y así se aligera la notación. En los campos que se presenten en adelante también se omitirá.

Es momento ahora de calcular los campos eléctrico y magnético para la otra posible polarización, denominada polarización p, transversal magnética (TM) o, como denotaremos, extraordinaria “e”. Se caracteriza por que la componente z del campo magnético es nula ($H_z^e = 0$), lo cual provoca que el procedimiento para obtener las componentes sea ligeramente distinto.

Se parte de la misma ecuación a resolver, Ec. (6). Como habíamos visto, cada una de las partes toma las formas presentadas en las Ecs. (7), a excepción de la segunda, que en este caso no será nula pues $E_z^e \neq 0$, no como ocurría para la polarización ordinaria para la que $E_z^o = 0$. Para obtener las expresiones de los campos correspondientes a esta polarización utilizaremos la componente \mathbf{e}_z de la Ec. (6). Es decir,

$$\nabla^2 \mathbf{E}|_z = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E})|_z - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E})|_z, \quad (18)$$

que proporciona la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E_z^e}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z^e}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 E_z^e}{\partial z^2} = \left(1 - \frac{\epsilon_{\parallel}}{\epsilon_{\perp}} \right) \frac{\partial^2 E_z^e}{\partial z^2} + \frac{\epsilon_{\parallel}}{c^2} \frac{\partial E_z^2}{\partial t^2}. \quad (19)$$

Ahora, siguiendo un procedimiento análogo al del caso de polarización ordinaria, se obtiene la componente E_z^e , y utilizando las ecuaciones de Maxwell de los rotacionales de los campos, se infieren el resto de componentes. Antes de presentar los campos conviene resaltar que, de nuevo, ya se ha considerado que la función de Bessel de segunda especie Y_n diverge en el origen ($r = 0$). Así,

$$\mathbf{E}^e = \frac{1}{g} \left(ik_z J'_n(k_{re}r) \mathbf{e}_r - \frac{nk_z}{k_{re}r} J_n(k_{re}r) \mathbf{e}_{\theta} + \frac{\epsilon_{\perp} k_{re}}{\epsilon_{\parallel}} J_n(k_{re}r) \mathbf{e}_z \right) e^{ik_z z} e^{in\theta} e^{-i\omega t}, \quad (20)$$

$$\mathbf{H}^e = \epsilon_{\perp} \left(\frac{n}{k_{re}r} J_n(k_{re}r) \mathbf{e}_r + i J'_n(k_{re}r) \mathbf{e}_{\theta} \right) e^{ik_z z} e^{in\theta} e^{-i\omega t}, \quad (21)$$

donde $k_{re}^2 = \frac{\epsilon_{\parallel}}{\epsilon_{\perp}} (\epsilon_{\perp} g^2 - k_z^2) = \frac{\epsilon_{\parallel}}{\epsilon_{\perp}} k_{ro}^2$. Las expresiones de los campos para las polarizaciones ordinaria y extraordinaria concuerdan con lo presentado en la bibliografía [5].

Una vez que tenemos las soluciones para polarización TE y TM en un cilindro uniaxial, es fácil generalizarlas a un cilindro isótropo, pues la única diferencia reside en que el tensor permitividad pasa a ser un escalar de valor ϵ la permitividad eléctrica del medio. Esta generalización, sin embargo, la realizaremos considerando un medio isótropo que rodea al cilindro uniaxial que habíamos considerado anteriormente. Es decir, el medio isótropo se encuentra en $r > R$. Los campos de las dos posibles polarizaciones se han cotejado satisfactoriamente con las referencias [6, 7], y son:

$$\mathbf{E}^+ = \left(\frac{in}{k_r r} H_n^{(1)}(k_r r) \mathbf{e}_r - H_n'^{(1)}(k_r r) \mathbf{e}_{\theta} \right) e^{ik_z z} e^{in\theta} e^{-i\omega t}, \quad (22)$$

$$\mathbf{H}^+ = \frac{1}{g} \left(k_z H_n'^{(1)}(k_r r) \mathbf{e}_r + i \frac{nk_z}{k_r r} H_n^{(1)}(k_r r) \mathbf{e}_{\theta} - ik_r H_n^{(1)}(k_r r) \mathbf{e}_z \right) e^{ik_z z} e^{in\theta} e^{-i\omega t}, \quad (23)$$

$$\mathbf{E}^- = \frac{1}{g} \left(ik_z H_n'^{(1)}(k_r r) \mathbf{e}_r - \frac{nk_z}{k_r r} H_n^{(1)}(k_r r) \mathbf{e}_{\theta} + k_r H_n^{(1)}(k_r r) \mathbf{e}_z \right) e^{ik_z z} e^{in\theta} e^{-i\omega t}, \quad (24)$$

$$\mathbf{H}^- = \epsilon \left(\frac{1}{k_r r} H_n^{(1)}(k_r r) \mathbf{e}_r + i H_n'^{(1)}(k_r r) \mathbf{e}_{\theta} \right) e^{ik_z z} e^{in\theta} e^{-i\omega t}, \quad (25)$$

donde se ha denotado con un “+” los campos de polarización TE y con un “-” los de polarización TM. Además, en lugar de utilizar las funciones de Bessel de primera especie se han utilizado las funciones de Hankel de primera especie ($H_n^{(1)}$), pues para un medio que se extiende hasta el

infinito y no incluye el origen son más convenientes. Esto se debe a que hay que considerar una combinación lineal de J_n e Y_n que decaiga cuando $r \rightarrow \infty$ (condición de radiación, [8]) y esta combinación corresponde a $H_n^{(1)}$, que explícitamente es $H_n^{(1)} = J_n + iY_n$. Por último, es necesario también decir que $k_r^2 = \epsilon g^2 - k_z^2$.

Así, habiendo calculado las expresiones para los campos tanto dentro como fuera del cilindro uniaxial, hay exigir que en la interfase entre ambos medios ($r = R$, $\forall z, \theta, t$) se cumplan las condiciones de contorno características de los campos electromagnéticos [8]. Usaremos las condiciones presentadas en las Ecs. (26),

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r \times (\mathbf{E}_{in} - \mathbf{E}_{out}) &= 0, \\ \mathbf{e}_r \times (\mathbf{H}_{in} - \mathbf{H}_{out}) &= \mathbf{j}_s = 0, \end{aligned} \quad (26)$$

donde \mathbf{j}_s corresponde a la densidad de corriente en la superficie de la interfase, que es nula al ser medios dieléctricos. Estas expresiones nos proporcionan cuatro ecuaciones que serán utilizadas para obtener los coeficientes de cada tipo de polarización en cada medio (*in* y *out*). Estas son,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r \times (\mathbf{E}_{in} - \mathbf{E}_{out}) &= 0, \quad \Rightarrow \quad E_{\theta,in} = E_{\theta,out}, \quad E_{z,in} = E_{z,out}, \\ \mathbf{e}_r \times (\mathbf{H}_{in} - \mathbf{H}_{out}) &= 0, \quad \Rightarrow \quad H_{\theta,in} = H_{\theta,out}, \quad H_{z,in} = H_{z,out}. \end{aligned} \quad (27)$$

Los campos eléctrico y magnético dentro y fuera del cilindro son una combinación lineal de las dos posibles polarizaciones. Los coeficientes de estas combinaciones se denotan por A_o y A_e para las polarizaciones ordinaria y extraordinaria dentro, y A_+ y A_- para las TE y TM fuera. Así pues, las ecuaciones que se inferen de las Ecs. (27) son:

$$\blacksquare E_{\theta,in} = E_{\theta,out} \Rightarrow$$

$$-A_o J'_n(k_{ro}R) - A_e \frac{nk_z}{gk_{re}R} J_n(k_{re}R) = -A_+ H_n^{(1)}(k_r R) - A_- \frac{nk_z}{gk_r R} H_n^{(1)}(k_r R), \quad (28)$$

$$\blacksquare E_{z,in} = E_{z,out} \Rightarrow$$

$$A_e \frac{\epsilon_{\perp} k_{re}}{\epsilon_{\parallel} g} J_n(k_{re}R) = A_- \frac{k_r}{g} H_n^{(1)}(k_r R), \quad (29)$$

$$\blacksquare H_{\theta,in} = H_{\theta,out} \Rightarrow$$

$$A_o \frac{ink_z}{gk_{ro}R} J_n(k_{ro}R) + A_e i\epsilon_{\perp} J'_n(k_{re}R) = A_+ \frac{ink_z}{gk_r R} H_n^{(1)}(k_r R) + A_- i\epsilon H_n^{(1)}(k_r R), \quad (30)$$

$$\blacksquare H_{z,in} = H_{z,out} \Rightarrow$$

$$-A_o \frac{ik_{ro}}{g} J_n(k_{ro}R) = -A_+ \frac{ik_r}{g} H_n^{(1)}(k_r R). \quad (31)$$

La solución a estas ecuaciones ((28), (29), (30), (31)), además de la solución trivial ($A_o = A_e =$

$A_+ = A_- = 0$), proviene de resolver el siguiente determinante e igualarlo a cero (Ec. (32)).

$$\begin{vmatrix} J'_n(k_{ro}R) & \frac{nk_z}{gk_{re}R}J_n(k_{re}R) & -H_n^{(1)}(k_rR) & -\frac{nk_z}{gk_rR}H_n^{(1)}(k_rR) \\ 0 & \frac{\epsilon_\perp k_{re}}{\epsilon_\parallel}J_n(k_{re}R) & 0 & -k_rH_n^{(1)}(k_rR) \\ \frac{nk_z}{gk_{ro}R}J_n(k_{ro}R) & \epsilon_\perp J'_n(k_{re}R) & -\frac{nk_z}{gk_rR}H_n^{(1)}(k_rR) & -\epsilon H_n^{(1)}(k_rR) \\ k_{ro}J_n(k_{ro}R) & 0 & -k_rH_n^{(1)}(k_rR) & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (32)$$

Expandiendo este determinante y simplificando la expresión apropiadamente, se obtiene la relación de dispersión del sistema estudiado, que ya había sido obtenida hace algo más de cincuenta años en [9]:

$$F_H(n, R, k_z) = \left(\frac{J'_n(k_{re}R)}{k_{re}R J_n(k_{re}R)} - \frac{\epsilon H_n^{(1)}(k_rR)}{\epsilon_\parallel k_r R H_n^{(1)}(k_rR)} \right) \left(\frac{J'_n(k_{ro}R)}{k_{ro}R J_n(k_{ro}R)} - \frac{H_n^{(1)}(k_rR)}{k_r R H_n^{(1)}(k_rR)} \right) - \frac{n^2 k_z^2}{g^2 R^4 \epsilon_\parallel} \left(\frac{1}{k_{ro}^2} - \frac{1}{k_r^2} \right)^2 = 0. \quad (33)$$

Llegados a este punto es conveniente recordar que $k_r^2 = \epsilon g^2 - k_z^2$, $k_{ro}^2 = \epsilon_\perp g^2 - k_z^2$ y $k_{re}^2 = \frac{\epsilon_\parallel}{\epsilon_\perp}(\epsilon_\perp g^2 - k_z^2) = \frac{\epsilon_\parallel}{\epsilon_\perp} k_{ro}^2$, pues son parámetros con los que trabajaremos habitualmente y es importante tener claro en todo momento qué forma tienen.

2. Aproximación cilindro \rightarrow plano

En el límite cuando $R \rightarrow \infty$ es de esperar que la relación de dispersión del cilindro coincida con la de la superficie plana ([3, 10]). En lo que sigue estudiaremos matemáticamente este límite y comprobaremos si se recupera el resultado para el plano. La relación de dispersión para las ondas Dyakonov en el plano [3] es,

$$F_{plano}(k_z, k_y) = q_{xo}(q_x + q_{xo})(q_x q_{xe} \epsilon_\perp + q_{xo}^2 \epsilon) k_z^2 - \epsilon_{perp}(q_x + q_{xe})(q_{xo} \epsilon + q_x \epsilon_\perp) k_y^2 = 0, \quad (34)$$

donde $q_x^2 = k_z^2 + k_y^2 - \epsilon g^2$, $q_{xo}^2 = k_z^2 + k_y^2 - \epsilon_\perp g^2$ y $q_{xe}^2 = \frac{\epsilon_\parallel}{\epsilon_\perp} k_z^2 + k_y^2 - \epsilon_\parallel g^2$. Tanto q_x como q_{xo} y q_{xe} toman valores puramente reales. Las ondas Dyakonov en el plano decaen exponencialmente en la dirección x (perpendicular al plano de la interfase) y se propagan por el plano YZ por lo que estas expresiones para q_x , q_{xo} y q_{xe} son válidas, pues los números de onda son realmente iq_x , iq_{xo} y iq_{xe} [3].

Así pues, la aproximación que hay que considerar es que el radio del cilindro (R) sea muy grande y que, a su vez, n sea más grande que $k_i R$, donde $k_i = k_r, k_{ro}, k_{re}$. Para esto usaremos las expansiones asintóticas de Debye [11] a orden 0, ya que nos permiten obtener una expresión simplificada para las funciones de Bessel y de Hankel y por tanto, para la relación de dispersión del cilindro. Estas son:

$$\begin{aligned} J_n(z) &\simeq \frac{e^{n(\tanh \alpha - \alpha)}}{\sqrt{2\pi n \tanh \alpha}}, & Y_n(z) &\simeq \frac{-e^{n(\alpha - \tanh \alpha)}}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi n \tanh \alpha}} \simeq -iH_n^{(1)}(z), \\ J'_n(z) &\simeq \sqrt{\frac{\sinh 2\alpha}{4\pi n}} e^{n(\tanh \alpha - \alpha)}, & Y'_n(z) &\simeq \sqrt{\frac{\sinh 2\alpha}{\pi n}} e^{n(\alpha - \tanh \alpha)} \simeq -iH_n^{(1)'}(z), \end{aligned} \quad (35)$$

donde $z = k_r r$ y $\alpha = \text{asech}(z/n)$. Las expansiones asintóticas de Debye son válidas siempre y cuando n sea positivo y grande y α sea positivo, hecho que se cumple si z es positivo y $z < n$.

En una superficies plana, los modos Dyakonov están débilmente ligados en la dirección perpendicular al plano [3], esto implica que $k_r \ll k_y$, con $k_y \neq 0$. Como se verá un poco más adelante, k_y da cuenta de n/R . Si nos situamos cerca de la superficie cilíndrica, $r \simeq R$, lo cual nos permite llegar a $n \gg k_r R \simeq k_r r$. Esto justifica el uso de las expansiones de Debye, pues nos encontramos en un rango válido de uso siempre y cuando nos situemos cerca de la superficie cilíndrica ($r \simeq R$). Conviene remarcar también que en esta aproximación se tiene lo que se ha presentado en la Ec. (35): $Y_n(z) \simeq -iH_n^{(1)}(z)$. También es destacable que tanto el término de $Y_n(z)$ como el de su derivada son mucho mayores que los de $J_n(z)$ (en el rango de valores que se considera), aunque los cocientes $J'_n(z)/J_n(z)$ y $Y'_n(z)/Y_n(z)$ sí que son comparables, hecho que se ha comprobado numéricamente pero que carece de interés mostrarlo. Como se puede suponer, lo que realmente nos interesa de momento son estos cocientes pues la relación de dispersión depende de ellos. Así pues, es útil calcularlos antes de pasar a simplificar la relación de dispersión:

$$\frac{J'_n(z)}{J_n(z)} = \sqrt{\frac{\sinh(2\alpha)2\pi n \tanh \alpha}{4\pi n}} = \sinh \alpha = \sqrt{\frac{n^2}{z^2} - 1}, \quad (36)$$

$$\frac{Y'_n(z)}{Y_n(z)} = \frac{H_n^{(1)'}(z)}{H_n^{(1)}(z)} = -\sqrt{\frac{\sinh(2\alpha)\pi n \tanh \alpha}{2\pi n}} = -\sinh \alpha = -\sqrt{\frac{n^2}{z^2} - 1}. \quad (37)$$

Aquí se ha utilizado que $\sinh(\text{asech}(x)) = \frac{\sqrt{1-x}}{1+x}(1+x)$, además de algunas propiedades de las funciones hiperbólicas, para obtener una expresión más sencilla.

Ahora, introduciendo las Ecs. (36) y (37) en la Ec. (33) se obtiene,

$$F_{Debye}(n, R, k_z) = \left(\frac{1}{k_{re}R} \sqrt{\frac{n^2}{k_{re}^2 R^2} - 1} + \frac{\epsilon}{\epsilon_{\parallel} k_r R} \sqrt{\frac{n^2}{k_r^2 R^2} - 1} \right) \left(\frac{1}{k_{ro}R} \sqrt{\frac{n^2}{k_{ro}^2 R^2} - 1} + \frac{1}{k_r R} \sqrt{\frac{n^2}{k_r^2 R^2} - 1} \right) - \frac{n^2 k_z^2}{g^2 R^4 \epsilon_{\parallel}} \left(\frac{1}{k_{ro}^2} - \frac{1}{k_r^2} \right)^2 = 0, \quad (38)$$

donde, si consideramos que $k_y = n/R$, podemos escribir

$$F_{Debye}(k_y, k_z) = \left(\frac{\sqrt{k_y^2 - k_{re}^2}}{k_{re}^2} + \frac{\epsilon \sqrt{k_y^2 - k_r^2}}{\epsilon_{\parallel} k_r^2} \right) \left(\frac{\sqrt{k_y^2 - k_{ro}^2}}{k_{ro}^2} + \frac{\sqrt{k_y^2 - k_r^2}}{k_r^2} \right) - \frac{k_y^2 k_z^2 (k_r^2 - k_{ro}^2)^2}{g^2 \epsilon_{\parallel} k_{ro}^4 k_r^4} = 0. \quad (39)$$

La consideración de $k_y = n/R$ es sutil pues si consideramos que el cilindro ha sido aproximado a un plano podemos entender que k_z sigue haciendo referencia a la dirección a la que hacía referencia en el caso del cilindro, los diferentes “ k_r ” se refieren a la dirección normal al plano y es la dirección angular caracterizada por n la que pasa a referirse a la dirección perpendicular a z pero contenida en el mismo plano. Se requiere además que las unidades sean las adecuadas por lo que se divide por R . Es por esta definición para k_y el porqué habíamos es-

critico k_z y k_y en la Ec. (34), para que tanto F_{Debye} como F_{plano} dependan de las mismas variables.

Como puede apreciarse al comparar la relación de dispersión de los modos Dyakonov en el plano (Ec. (34)) con esta Ec. (39), no coinciden. Sin embargo, podemos realizar una representación de las combinaciones de valores de k_z y k_y que satisfacen la relación de dispersión del plano (Ec. (34)) por un lado y la relación de dispersión del cilindro aproximado a plano (Ec. (39)) por otro para ver si estas sí coinciden. Esto se muestra en la Fig. (2).

La Fig. (2) se ha obtenido considerando $\epsilon = 1.8$, $\epsilon_{\perp} = 1$ y $\epsilon_{\parallel} = 5$, ya que estos son los valores que se trataron en el artículo de referencia [3]. Además, se han normalizado los números de ondas al valor del número de ondas en vacío, esto es, $g = 1$. En lo que resta de memoria, estos cuatro parámetros se mantendrán con estos valores.

Así pues, la concordancia total de ambas curvas supone la confirmación de que la relación de dispersión obtenida recupera el resultado de [3] en el límite adecuado. Las soluciones que satisfacen la Ec. (34) son las mismas que las que satisfacen la Ec. (39), aunque ambas expresiones no coincidan.

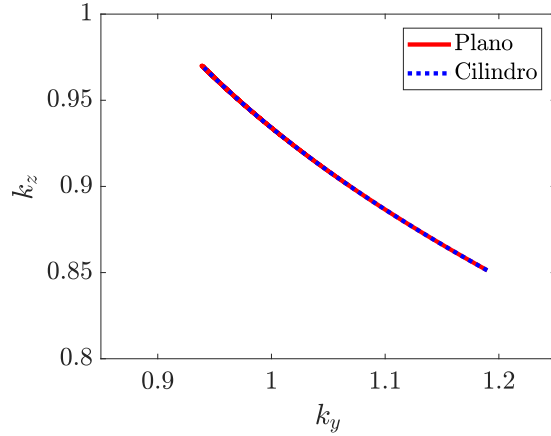


Figura 2: Solución a la relación de dispersión ($k_z(k_y)$) de los modos Dyakonov (en rojo) y para nuestro sistema cilíndrico una vez realizada la aproximación a un plano (en azul).

3. Búsqueda de una solución

Una vez realizada la comprobación anterior podemos pasar a estudiar propiamente la relación de dispersión del cilindro. Lo que realmente nos va a interesar va a ser encontrar los valores de k_z tales que esta relación de dispersión se cumpla y tengamos así una solución del sistema. Dado que k_y en realidad simplemente da cuenta de n y R , podemos fijar tanto el radio del cilindro como n y centrarnos en el estudio en función de k_z , que a su vez determinará k_r , k_{ro} y k_{re} , números de onda que describirán cómo se comportan las ondas de nuestra solución tanto dentro del cilindro como fuera de él.

Para llevar a cabo un primer acercamiento a la búsqueda de soluciones, tomaremos $n = 200$ y $R = 175$. Dada la normalización de $g = 1$, $R = 175$ supone un radio de $(175/2\pi)\lambda \simeq 30\lambda$, treinta veces la longitud de onda, es decir, un radio grande. Estos valores de n y R se mantendrán a lo largo de esta sección y de la Sección (4).

Por supuesto, para este caso nos olvidamos de las expansiones asintóticas de Debye puesto que vamos a usar la relación de dispersión general. Sin embargo, un hecho importante que nos va a permitir realizar un primer análisis más sencillo es que $Y_n(z)$ y $Y'_n(z)$ siguen siendo mucho mayores que $J_n(z)$ y $J'_n(z)$ para el n y el R escogidos y para el k_r , que es el término del que

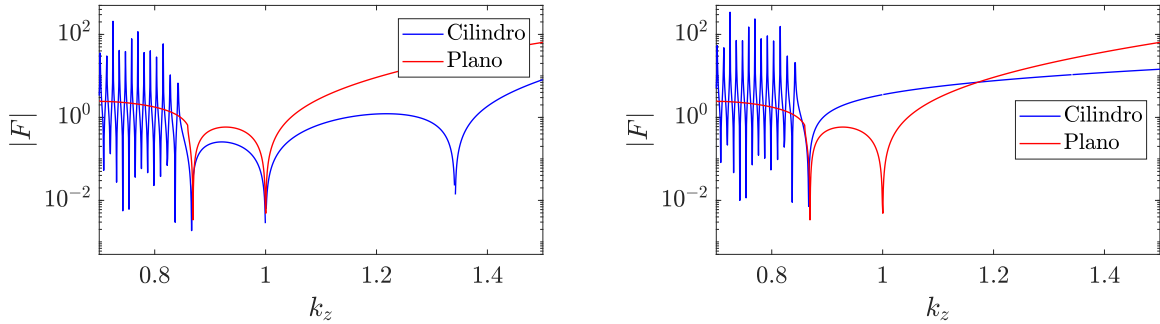
depende las funciones de Bessel de segunda especie. Por esto, podemos simplificar los términos de las funciones de Hankel de la Ec. (33) según

$$\frac{H_n^{(1)}(k_r R)}{H_n^{(1)}(k_r R)} = \frac{J_n'(k_r R) + iY_n'(k_r R)}{J_n(k_r R) + iY_n(k_r R)} = \frac{Y_n'(k_r R)}{Y_n(k_r R)} \cdot \frac{1 - iJ_n'(k_r R)/Y_n'(k_r R)}{1 - iJ_n(k_r R)/Y_n(k_r R)} \simeq \frac{Y_n'(k_r R)}{Y_n(k_r R)}, \quad (40)$$

pues el resto de término son mucho más pequeños en el rango de estudio. Si implementamos esto en la Ec. (33) la relación de dispersión que queda es

$$F_Y(n, R, k_z) = \left(\frac{J_n'(k_{re} R)}{k_{re} R J_n(k_{re} R)} - \frac{\epsilon Y_n'(k_r R)}{\epsilon_{\parallel} k_r R Y_n(k_r R)} \right) \left(\frac{J_n'(k_{ro} R)}{k_{ro} R J_n(k_{ro} R)} - \frac{Y_n'(k_r R)}{k_r R Y_n(k_r R)} \right) - \frac{n^2 k_z^2}{g^2 R^4 \epsilon_{\parallel}} \left(\frac{1}{k_{ro}^2} - \frac{1}{k_r^2} \right)^2 = 0. \quad (41)$$

El primer análisis que se mencionaba anteriormente consiste en representar el valor absoluto de F_Y y de F_{plano} respecto k_z , y observar cómo varía la forma de estas funciones. Lo que se busca entonces son las soluciones para la relación de dispersión, es decir, los ceros de las Ecs. (34) y (41). Esto se muestra en la Fig. (3a).



(a) Representación del valor absoluto de las relaciones de dispersión frente a k_z , sin haber eliminado los ceros espurios. En azul se observa $|F_Y(k_z)|$ y en rojo $|F_{plano}(k_z)|$.

(b) Representación del valor absoluto de las relaciones de dispersión frente a k_z , habiendo eliminado los ceros espurios. En azul se observa $|F_Y(k_z)|$ y en rojo $|F_{plano}(k_z)|$.

Figura 3

Nos centramos ahora en la Fig. (3a). Para valores bajos de k_z se observa una serie de oscilaciones de $|F_Y|$ entorno al valor de $|F_{plano}|$. Estas se puede asociar a ondas de tipo propagante, que oscilan tanto dentro como fuera del cilindro. Es decir, son soluciones propagantes, que lógicamente no aparecen en el caso del plano puesto que no hay medio “interno” para que se propaguen y solo aparecen cuando pueden ser guiadas a través del cilindro. Sin embargo, cuando nos desplazamos hacia k_z mayores, a partir de $k_z \simeq 0.85$, se observa un cambio radical en la forma de los ceros de las relaciones de dispersión. Pasan de aparecer de forma oscilante a presentarse individualmente para unos k_z concretos. Estas ondas se denominan evanescentes y se caracterizan por decaer exponencialmente con la coordenada radial dentro y fuera del cilindro, hecho que se estudiará en profundidad más adelante. Aunque estrictamente hablando no son ondas evanescentes pues únicamente decaen de esta forma en una región muy cercana de la superficie del cilindro; después, pasan a propagarse. El primer cero de F_Y que aparece se encuentra en $k_z^Y \simeq 0.8664$, valor ligeramente menor que la solución que presenta F_{plano} , hecho que no debería

de ser sorprendente, pues son superficies distintas. Sin embargo, el siguiente que aparece es en $k_z = 1$, que coincide exactamente con el cero de F_{plano} . Esto nos lleva a pensar que corresponde a una solución espuria, una solución debida a estar multiplicando por un factor común que se anula en k_z a toda la expresión. Para finalizar, aparece un último cero en $k_z \simeq 1.34$, el cual asociamos de nuevo a una solución espuria por la misma razón que el anterior. De hecho, ambos ceros espurios de F_Y pueden eliminarse simplemente dividiendo por k_{ro}^2 y k_r^2 , respectivamente. Esto se muestra en la Fig. (3b).

De momento vamos a pasar por alto el hecho de que es a partir de un k_z concreto cuando aparecen las soluciones correspondientes a ondas evanescentes, pues más adelante realizaremos un análisis más exhaustivo de este fenómeno (Sección (5)) y daremos una explicación.

Todo este primer análisis nos ha permitido averiguar qué tipo de soluciones van a aparecer y en qué rango de k_z estarán. Ahora bien, es importante no olvidarse de que la relación de dispersión con la que estábamos trabajando es una aproximación. Obtener la verdadera solución a nuestro sistema pasa por considerar la relación de dispersión de la Ec. (33) y encontrar el cero de esta.

Antes de pasar a intentar encontrar el cero de F_H , podemos representar tanto F_H como F_Y en el entorno de k_z^Y (la solución para F_Y) para ver si se nos ocurre alguna forma sencilla de inferir k_z^H a partir de k_z^Y . Esto se muestra en la Fig. (4).

Tal y como se observa, $|F_H|$ se aproxima a cero pero no exactamente, ya que no se aprecia el corte como sí ocurre para F_Y . Esto nos hace plantearnos que quizás el k_z^H tal que $F_H(k_z^H) = 0$ simplemente sea una pequeña perturbación de k_z^Y , es decir, $k_z^H = k_z^Y + \delta k_z$. Por tanto, si definimos $\Delta F = F_H - F_Y$ asumiendo que ΔF es pequeño y por tanto $\Delta F(k_z^H) \simeq \Delta F(k_z^Y)$, y si recordamos que $F_Y(k_z^Y) = 0$, podemos escribir:

$$\begin{aligned} F_H(k_z^H) = 0 &= F_Y(k_z^H) + \Delta F(k_z^H) \\ &= F_Y(k_z^Y) + F_Y'(k_z^Y) \delta k_z + \Delta F(k_z^Y) \\ &= F_Y'(k_z^Y) \delta k_z + \Delta F(k_z^Y). \end{aligned} \quad (42)$$

Así, la variación en el número de ondas queda,

$$\delta k_z = -\frac{\Delta F(k_z^Y)}{F_Y'(k_z^Y)}, \quad (43)$$

donde $F_Y'(k_z^Y)$ hace referencia a la derivada de la función F_Y evaluada en k_z^Y . Esta derivada se

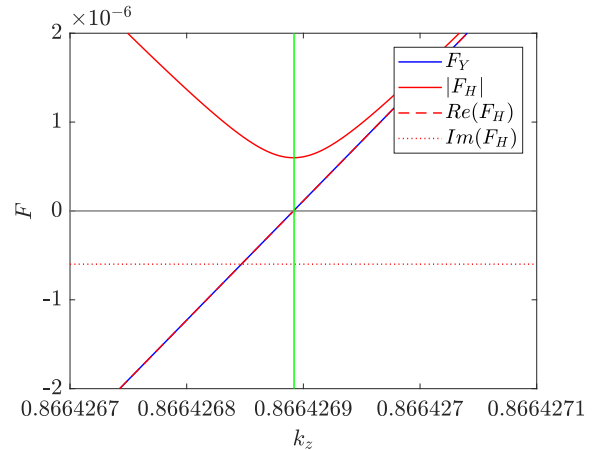


Figura 4: Representación tanto de F_Y (en azul) como de $|F_H|$, $Re(F_H)$ y $Im(F_H)$ (en rojo) frente a k_z . Conviene destacar que F_Y es puramente real pero se representa con línea continua para que pueda apreciarse en la figura. Se utiliza la línea gris para situar visualmente el cero y la línea verde para localizar la solución de F_Y .

ha calculado a través del Teorema del Valor Medio según

$$F'_Y(k_z^Y) = \frac{F_Y(k_z^Y + \delta/2) - F_Y(k_z^Y - \delta/2)}{\delta}, \quad (44)$$

donde δ es un valor tal que F_Y se comporta linealmente en ese entorno, en este caso, $\delta = 10^{-7}$.

Con todo esto, la variación en el número de ondas es $\delta k_z = 4.6 \cdot 10^{-14} + i4 \cdot 10^{-8} \simeq i4 \cdot 10^{-8}$. Uno podría pensar que dado el orden de magnitud de la solución para F_Y ($k_z^Y = 0.8664269$) esta variación sería irrelevante, pero nada más lejos de la realidad. Esta corrección a k_z^Y es prácticamente imaginaria, hecho que tiene consecuencias matemáticas importantes.

Podemos afirmar que k_z^H es un cero de la relación de dispersión F_H si obtenemos un valor mucho menor que el que obteníamos cuando en la Fig. (4) calculábamos $|F_H(k_z^Y)|$. Este valor era $|F_H(k_z^Y)| = 6 \cdot 10^{-7}$, mientras que al añadir la variación δk_z se obtiene $|F_H(k_z^H)| = 4 \cdot 10^{-12}$. Se presenta pues que a través de una pequeña perturbación en el número de ondas solución de F_Y somos capaces de encontrar los ceros de la relación de dispersión F_H , ya que una reducción de cinco órdenes de magnitud supone una mejora notable de la solución.

Antes de analizar qué tipo de ondas producen esta solución es conveniente darse cuenta de que la definición de k_r , k_{ro} y k_{re} hace que estas tomen dos posibles valores: el valor positivo de la raíz cuadrada o el valor negativo. Por otro lado, han de cumplirse las condiciones de contorno de radiación, es decir, los campos han de anularse en el infinito. Dada la expansión asintótica de la función de Hankel de primera especie en el infinito [11], la parte imaginaria de k_r ha de ser $\text{Im}(k_r) \geq 0$ para que esta condición de contorno se cumpla. Lo mismo ha de ocurrir para k_{ro} y k_{re} , pues pese a que estas van con la función de Bessel de primera especie, son independientes del radio del cilindro R y de n , y en la aproximación a un plano se tendría que recuperar la anulación de los campos en el infinito. Así pues, también se tendría que cumplir que $\text{Im}(k_{ro}) \geq 0$ y $\text{Im}(k_{re}) \geq 0$. Se dice que si estas condiciones para la parte imaginaria del número de ondas se cumplen nos encontramos en la hoja de Riemann propia, la cual tiene modos físicos y cumple las condiciones de contorno de radiación [12]. En las hojas impropias se puede satisfacer la relación de dispersión pero las soluciones no cumplen las condiciones de radiación ($\text{Im}(k_i) < 0$), por lo tanto, corresponden a modos que no se pueden excitar aisladamente.

Aun con todo, estos modos impropios sí que tienen relevancia. Si tenemos un fuente localizada, por ejemplo puntual, capaz de excitar estos modos, hay que calcular las integrales de Sommerfeld, una ardua tarea que requiere de técnicas de integración en el plano complejo y que puede desembocar en el uso de las deformaciones de los contornos y de cambios en las hojas de Riemann, donde cobran relevancia nuestras soluciones [13]. La deformación de estos contornos se lleva a cabo de forma conveniente, dependiendo de r y z . Esto produce un rango de valores de r y z tales que el campo decae y no diverge como cabría esperar por la parte imaginaria de k_r , pues el decaimiento debido a la dependencia del campo con k_z domina (ya que k_z sí que presenta parte imaginaria positiva). Esto permite además definir un ángulo crítico, que depende de las partes imaginarias de k_r y de k_z , para el cual el campo decae y se tiene pues un modo ligado a la superficie. A este tipo de ondas, resultado de las soluciones en las hojas de Riemann impropias, se las denomina *Leaky waves* [12, 13].

Si exigimos pues que las partes imaginarias de k_r , k_{ro} y k_{re} sean positivas para tener soluciones pertenecientes a la hoja propia de Riemann obtenemos que no existen soluciones de este tipo. Esto tiene una consecuencia clara y es que los modos Dyakonov no existen en superficies cilíndricas como la estudiada aquí. Sin embargo, si relajamos la condición de radiación y permitimos que las partes imaginarias de k_r , k_{ro} y k_{re} puedan ser negativas sí que existe solución y se obtienen los siguientes valores:

$$\begin{aligned} k_r(k_z^H) &= 1.02435562 - 4 \cdot 10^{-8}i, \\ k_{ro}(k_z^H) &= 0.49930396 - 8 \cdot 10^{-8}i, \\ k_{re}(k_z^H) &= 1.11647759 - 1.7 \cdot 10^{-7}i. \end{aligned} \quad (45)$$

Estos números de onda que sí que cumplen la relación de dispersión, aunque no la condición de radiación, corresponden pues a modos de la hoja impropia de Riemann. De ahora en adelante, para diferenciar estas soluciones impropias denotaremos a la relación de dispersión con un superíndice “-”, F_H^- , que designa que la parte imaginaria de k_r , k_{ro} y k_{re} es negativa.

4. Campos electromagnéticos

Una vez obtenida una explicación satisfactoria de la solución a la relación de dispersión presentada en la Ec. (33), podemos preguntarnos cómo se comportan las componentes de los campos eléctrico y magnético cuando nos movemos en la coordenada radial. Para ello, por supuesto, usaremos la solución a la relación de dispersión k_z^H . La comprobación de que las componentes de los campos se comportan de la manera correcta va a consistir en demostrar que las condiciones de contorno de la Ec. (26) se cumplen. Además, mostraremos también cómo E_r no es continua en $r = R$ mientras que D_r sí que lo es, resultado proveniente de otra condición de contorno típica de las ondas electromagnéticas pero que no se consideró para obtener la relación de dispersión. Esta es,

$$\mathbf{e}_r \cdot (\mathbf{D}_{in} - \mathbf{D}_{out}) = \sigma_s = 0, \quad (46)$$

donde σ_s hace referencia a la densidad de carga superficial en la superficie que, al estar trabajando con medios dieléctricos, es nula. Esta relación nos permite obtener una más explícita:

$$D_{r,in} = D_{r,out}, \quad \Rightarrow \quad E_{r,in} \neq E_{r,out}. \quad (47)$$

Antes de representar los campos y demostrar así el cumplimiento de las condiciones de contorno, es necesario dotar de un valor numérico a las constantes A_o , A_e , A_+ y A_- . Se eligen los siguientes, tales que los campos toman un valor razonable (~ 1 en $r = R$):

$$\begin{aligned} A_o &= \frac{-1}{k_{ro}J_n(k_{ro}R)}, \quad A_+ = \frac{k_{ro}J_n(k_{ro}R) \cdot A_o}{k_r H_n^{(1)}(k_r R)}, \\ A_e &= \frac{k_r H_n^{(1)}(k_r R) \cdot (H_n^{(1)}(k_r R) \cdot A_+ - J_n'(k_{ro}R) \cdot A_o)}{\frac{nk_z}{k_{re}R} J_n(k_{re}R) \cdot k_r H_n^{(1)}(k_r R) - \frac{nk_z}{k_r R} H_n^{(1)}(k_r R) \cdot \frac{k_{re}\epsilon_{\perp}}{\epsilon_{\parallel}} J_n(k_{re}R)}, \\ A_- &= \frac{\frac{k_{re}\epsilon_{\perp}}{\epsilon_{\parallel}} J_n(k_{re}R)}{k_r H_n^{(1)}(k_r R) \cdot A_e}. \end{aligned} \quad (48)$$

Con esta normalización, se muestran las componentes E_θ , E_z , H_θ y H_z en la Fig. (5).

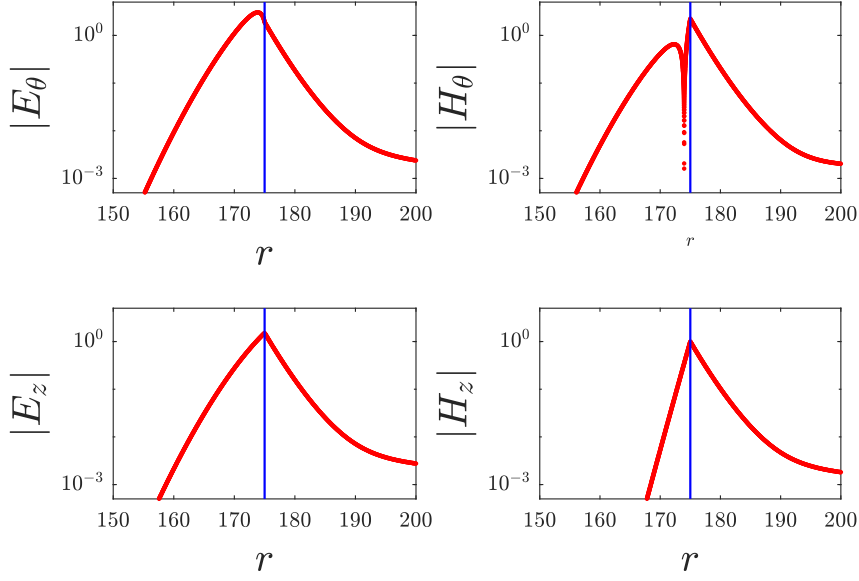
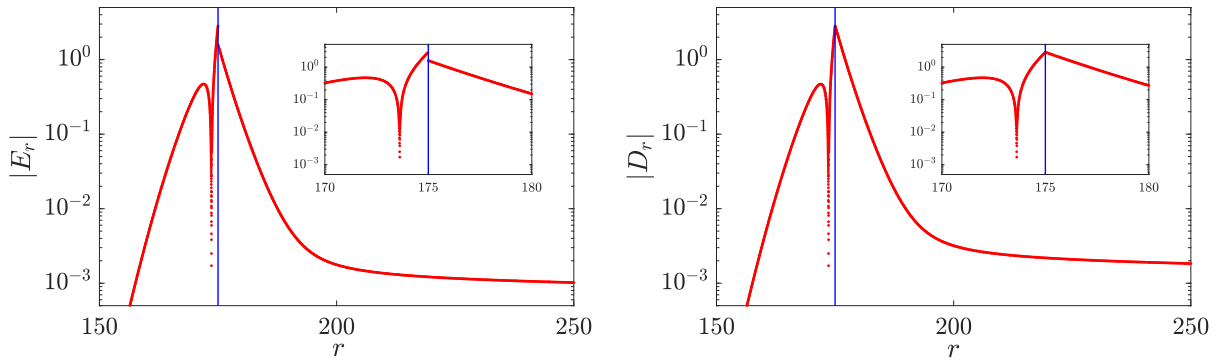


Figura 5: Representación respecto de la coordenada radial del módulo de E_θ (arriba, izquierda), E_z (abajo, izquierda), H_θ (arriba, derecha) y H_z (abajo, derecha). Las líneas verticales azules marcan el radio del cilindro, donde las componentes se han de empalmar y presentar continuidad ($r = 175$).

A la vista de la gráfica se observa perfectamente la continuidad de las cuatro componentes representadas, tal y como se preveía. Además, se aprecia también el decaimiento que sufren todas ellas cuando disminuimos o aumentamos r lo suficiente.

Ahora, podemos presentar las gráficas que muestren las relaciones expresadas en la Ec. (47). Estas son las Figs. (6a) y (6b).



(a) Representación del módulo de E_r respecto a la coordenada radial. Se muestra también incrustada esta misma magnitud en un rango de r más pequeño, para así facilitar su apreciación. La línea azul hace de señalizador de $r = 175$.

(b) Representación del módulo de D_r respecto a la coordenada radial. Se muestra también incrustada esta misma magnitud en un rango de r más pequeño, para así facilitar su apreciación. La línea azul hace de señalizador de $r = 175$.

Figura 6

Tal y como se aprecia en las partes incrustadas de las Figs. (6a) y (6b), la coordenada radial del campo eléctrico no es continua en $r = R$ mientras que la coordenada radial del vector

desplazamiento sí que lo es, como queríamos demostrar. Estas comprobaciones son una prueba más de que la obtención de la relación de dispersión se ha llevado a cabo de forma correcta.

Aun podemos seguir extrayendo resultados del análisis de los campos eléctrico y magnético. Se aprecia tanto en la Fig. (5) como en las Figs. (6a) y (6b) que el decaimiento de las componentes de los campos en $r > R$ es muy similar. Por centrarnos en uno de ellos, escogemos la componente radial del campo eléctrico (E_r). Dado que E_r en esta región viene determinada a su vez por una combinación lineal de E_r^+ y E_r^- , tomamos a consideración el término de E_r^+ , pues es mayor que E_r^- en este rango y porque su dependencia con la función de Hankel de primera especie es más sencilla, $E_r^+ \sim H_n^{(1)}$ mientras que $E_r^- \sim H_n^{(1)}$. La forma de esta función es:

$$E_r^+(r) = \frac{1}{f} \cdot \frac{-1}{k_r H_n^{(1)}(k_r R)} \cdot \frac{in}{k_r r} H_n^{(1)}(k_r r), \quad (49)$$

donde $f = 1.077$ y simplemente es un factor de normalización para que $E_r^+(r = R) = 1$. El segundo término corresponde a A_+ y el tercero a la dependencia con la función de Hankel. Una representación de este término se muestra en la Fig. (7).

En la Fig. (7) se observa un rápido decaimiento seguido de una oscilación cuyo módulo también va disminuyendo.

El análisis del decaimiento se va a realizar estudiando un rango de valores de la coordenada radial cercano al radio del cilindro a través de dos aproximaciones diferentes.

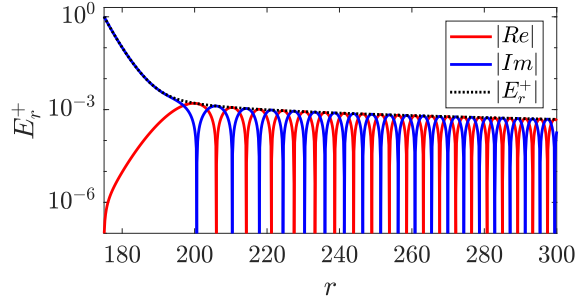


Figura 7: Representación de $|E_r^+|$ (negro), $Re(E_r^+)$ (rojo) y $Im(E_r^+)$ (azul) en un amplio rango de r .

La primera aproximación que se considerará será sustituir la función de Hankel de primera especie ($H_n^{(1)}$) por su homónima usando las expansiones asintóticas de Debye [11]: $H_n^{(1),D} = J_n^D + iY_n^D$. Para ello se usarán los resultados presentados en la Ec. (35). De tal manera, la función que se representará se denotará por el superíndice D y es:

$$E_r^{+,D}(r) = \frac{1}{f} \cdot \frac{-1}{k_r H_n^{(1)}(k_r R)} \cdot \frac{in}{k_r r} (J_n^D(k_r r) + iY_n^D(k_r r)). \quad (50)$$

La segunda aproximación que se llevará a cabo consistirá en representar el decaimiento típico de una onda cilíndrica evanescente, correspondiente a aproximar la expansión asintótica de la función de primera especie de Hankel en el rango de r cercano a R [4]. La expresión a representar se denotará por el superíndice E y es:

$$E_r^{+,E}(r) = \frac{A}{\sqrt{r^3}} e^{-\tilde{k}_r r}, \quad (51)$$

donde A es una constante de normalización, que dada la condición de que $E_r^+(r = R) = 1$

es $A = \sqrt{R^3} e^{\tilde{k}_r R}$. Y el número de ondas que aquí se considera no es exactamente k_r sino $\tilde{k}_r^2 = (n/R)^2 + k_z^2 - \epsilon g^2$.

La justificación de estas aproximaciones se realizará posteriormente, junto al análisis de la figura donde se presentan todas estas expresiones. Esto se muestra en la Fig. (8).

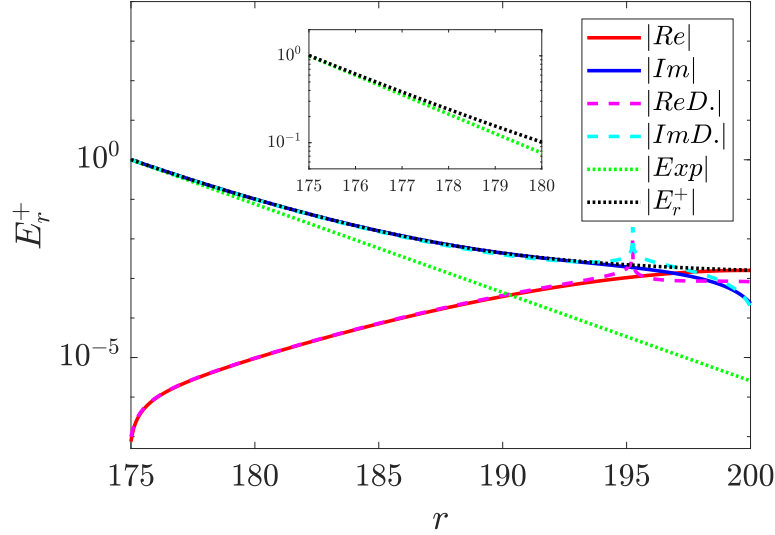


Figura 8: Representación de E_r^+ y de sus aproximaciones respecto de la coordenada radial. En rojo se muestra el valor absoluto de la parte real de E_r^+ y en azul de la parte imaginaria. En magenta y en cian, el análogo para la aproximación de las expansiones asintóticas de Debye, respectivamente. En verde se presenta la aproximación exponencial. En negro el valor absoluto de E_r^+ sin aproximaciones. También se muestra incrustado un acercamiento de la región de $r \simeq R$.

Como ya se adelantaba antes, se busca dar una interpretación de las aproximaciones realizadas y extraer consecuencias de lo obtenido gráficamente.

Para la aproximación que toma las expansiones asintóticas de Debye (magenta y cian) se obtiene un ajuste impecable hasta $r \simeq 194$. Esto se explica recordando la condición de validez para las expansiones, $n > k_r r$. En este caso $n = 200$ y $k_r \simeq 1.024$, aunque tiene una pequeña componente imaginaria, en cualquier caso despreciable para este razonamiento. Se obtiene pues que esta aproximación es válida para $r < n/k_r \simeq 195$, valor muy similar al que se observa en la Fig. (8) y por tanto satisfactorio. La motivación para comprobar esta aproximación reside en la sencillez de cálculo que supone obtener las funciones de Bessel de primera y segunda especie en este rango de valores de sus parámetros a través de las expansiones asintóticas de Debye.

En segundo lugar, para la aproximación exponencial, se aprecia en la Fig. (8) que la concordancia con la curva correspondiente a $|E_r^+|$ enseguida desaparece. Por esto, es conveniente realizar un acercamiento de la zona donde parece que aun se comporta adecuadamente la aproximación. Este acercamiento se muestra incrustado en la Fig. (8). Se observa que la aproximación exponencial es relativamente buena hasta $r \simeq 176$. Ciertamente, es un rango de validez pequeño pero la explicación de esto es muy sencilla. Ya se había adelantado que a través de esta aproximación se quería observar si el decaimiento típico de una onda cilíndrica evanescente era válido en alguna región de la coordenada radial, y así se ha visto. Esto constata que si nos acercamos

lo suficiente al cilindro ($r \rightarrow R^+$), lo que realmente observamos es una superficie plana y por tanto, la onda cilíndrica que ahí se tiene se comporta en consecuencia. Es por esto que el número de ondas que se había considerado no era k_r , sino \tilde{k}_r . Este \tilde{k}_r es el número de ondas utilizado en la Sección (2) para caracterizar las ondas Dyakonov en el plano, considerando $k_y = n/R$. Que sea este \tilde{k}_r el que se ajuste en la región $r \simeq R$ está en completo acuerdo con el hecho de que un observador en estas distancias ve la superficie cilíndrica como un plano. Para dotar de una mayor confirmación a este resultado se realizaron simulaciones aumentando tanto n como el radio R , obteniendo como resultado que el rango de valores de r para los que se comportaba bien la aproximación exponencial aumentaba, como es lógico. Sin embargo, se ahorra la representación de estas gráficas pues son de apariencia similar a la Fig. (8) y resultaría repetitivo.

Una vez estudiada la región cercana al cilindro, podemos pasar a analizar la zona en la que se observaban oscilaciones en la Fig. (7). Más concretamente, nos interesa saber qué ocurre cuando nos alejamos lo suficiente del cilindro. Un observador situado en $r \rightarrow \infty$ vería al cilindro como una fuente puntual, lo cual puede analizarse matemáticamente. Esta situación es equivalente a que r sea muy grande, condición bajo la cual pueden realizarse ciertas simplificaciones en la función de Hankel de primera especie para obtener una expresión más sencilla. En [4] se presenta una forma general de expandir en potencias la función de Hankel de interés. En el límite en el que $r \gg n^2/k_r \simeq 200^2/1.024 \simeq 4 \cdot 10^4$ la expresión para la aproximación del campo es

$$E_r^+(r) = \frac{1}{f} \cdot \frac{-1}{k_r H_n^{(1)}(k_r R)} \cdot \frac{in}{k_r r} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi k_r r}} e^{i(k_r r - \frac{\pi}{2}(n + \frac{1}{2}))}, \quad (52)$$

donde el último término corresponde a la expansión de $H_n^{(1)}(k_r r)$ en el límite tratado. La expresión general respecto a la que se compara corresponde a la Ec. (49). Para asegurarnos de estar en un rango adecuado de trabajo nos situamos en $r \sim 4 \cdot 10^6$. Esto se muestra en la Fig. (9), donde se aprecia la perfecta concordancia entre ambas expresiones. Observando las oscilaciones y fijándose en el orden de magnitud de E_r^+ , se concluye que las oscilaciones que se vislumbraban ya en la Fig. (7) han continuado disminuyendo en módulo y los periodos se han ajustado hasta llegar a lo que aquí se presenta.

Así pues, podemos confirmar que el comportamiento de las ondas que ve un observador lo suficientemente alejado del cilindro es el típico de una fuente puntual, como queríamos demostrar.

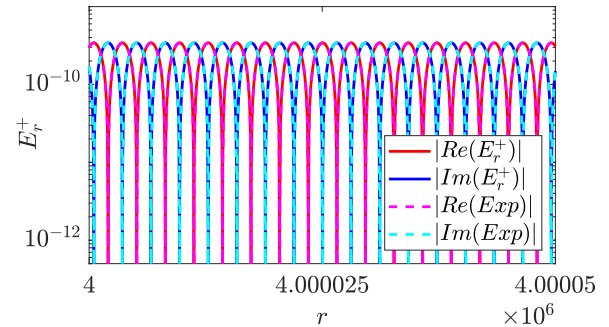


Figura 9: Representación del módulo de las partes real e imaginaria de E_r^+ (rojo y azul) y de la simplificación exponencial (magenta y cian).

5. Búsqueda de soluciones

Como se ha visto en la Sección (3), el método utilizado para obtener el cero de la relación de dispersión F_H^- consistía en llevar a cabo perturbaciones a partir de la solución de la relación de dispersión F_Y . En principio, este método nos ha reportado resultados satisfactorios por lo que vamos a probar con otro valor para el radio del cilindro y ver si estos buenos resultados persisten. El radio escogido es $R = 216$ y los resultados obtenidos a través de este método son:

$$\begin{aligned} k_z^Y = 0.976973 \Rightarrow \delta k_z = 0.006937 + 0.018459i \Rightarrow k_z^H = 0.983910 + 0.018459i, \\ |F_H^-(k_z^Y)| = 0.0099, \quad |F_H^-(k_z^H)| = 0.0153. \end{aligned} \quad (53)$$

Se aprecia que, tanto del hecho de que δk_z es mucho mayor de lo que había sido en el caso de $R = 175$ como de que $|F_H^-(k_z^H)| > |F_H^-(k_z^Y)|$, el método ya no produce resultados aceptables. Por esto, es necesario plantear otro modelo que para los casos “malos” como este nos siga extrayendo soluciones correctas.

El método se denomina “Método del gradiente” y a efectos prácticos es igual que el método de perturbaciones pero de forma reiterada y con F_H^- en lugar de con F_Y , aunque sí que se parte de la solución de F_Y . Se puede ver como

$$F_H^-(k_{z,i}^H) = F_H^-(k_{z,i-1}^H) + F_H'^-(k_{z,i-1}^H) \cdot \delta k_{z,i} = 0 \Rightarrow \delta k_{z,i} = -\frac{F_H^-(k_{z,i-1}^H)}{F_H'^-(k_{z,i-1}^H)}, \quad (54)$$

y esto se reintroduce tal que

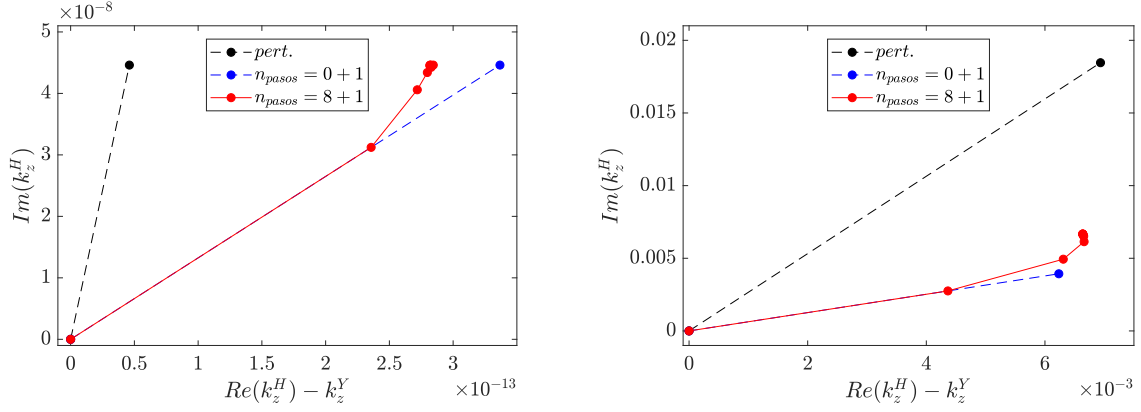
$$k_{z,i}^H = k_{z,i-1}^H + p \cdot \delta k_{z,i}. \quad (55)$$

Este proceso se produce de forma reiterada un número de veces n_{pasos} , siendo $p = 0.7$ en todos los pasos excepto en el último, que es $p = 1.0$. i va desde 1 hasta n_{pasos} , siendo $k_{z,0}^H = k_z^Y$.

Así pues, usando este método para obtener los ceros de la relación de dispersión se obtiene una mejora muy notable. Tomando $n_{pasos} = 8 + 1$ (el +1 corresponde al paso en el que $p = 1.0$) se obtiene:

$$k_z^H = 0.983610 + 0.006669i, \quad |F_H^-(k_z^Y)| = 0.0099, \quad |F_H^-(k_z^H)| = 7 \cdot 10^{-11}, \quad (56)$$

lo cual deja constancia de la gran mejora que supone este método. En las Figs. (10a) y (10b) se presenta una comparativa de ambos métodos para los casos de $R = 175$ y $R = 216$. En negro se muestra el método perturbativo básico, en azul el método del gradiente con tan solo el paso de $p = 1.0$ y en rojo el método del gradiente con un mayor número de pasos.



(a) Representación de la parte imaginaria de k_z^H frente a la parte real de este para $R = 175$. (b) Representación de la parte imaginaria de k_z^H frente a la parte real de este para $R = 216$.

Figura 10

Si se atiende a las escalas de ambos ejes se observa como la diferencia entre las soluciones encontradas a partir de los dos diferentes métodos es mucho mayor para el caso de $R = 216$. Este hecho encaja perfectamente con el resultado anterior de que el método perturbativo no funciona para $R = 216$ mientras que para $R = 175$ proporciona un resultado razonablemente bueno.

Así pues, a partir de ahora utilizaremos este método para obtener las soluciones a la relación de dispersión F_H^- usando k_z^Y como semilla.

En la Sección (3) ya adelantábamos que sería aquí cuando analizaríamos el hecho de que es a partir de un cierto valor de k_z cuando los ceros que aparecen en la relación de dispersión F_Y son de nuestro interés. Esto es debido a que es a partir de este valor de k_z que los números de onda k_r , k_{re} y k_{ro} corresponden a ondas evanescentes. Sin embargo, no serán realmente k_r , k_{re} y k_{ro} sino \tilde{k}_r , \tilde{k}_{re} y \tilde{k}_{ro} las que nos permitan obtener este k_z límite, pues como se había observado en las Figs. (7) y (8), es en un pequeño rango de r próximo a R en el que se produce el decaimiento y corresponde pues a la situación nombrada anteriormente de un observador cerca de la superficie cilíndrica viéndola como un plano. Las condiciones son pues

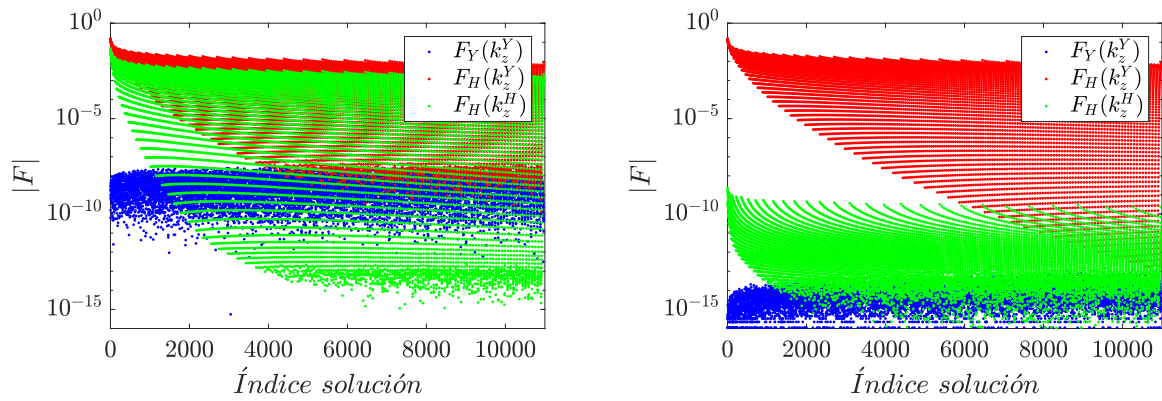
$$\begin{aligned} \tilde{k}_r &= \sqrt{k_z^2 + (n/R)^2 - \epsilon g^2} \in \mathbb{R} \Rightarrow k_z \geq \sqrt{\epsilon g^2 - (n/R)^2}, \\ \tilde{k}_{ro} &= \sqrt{k_z^2 + (n/R)^2 - \epsilon_{\perp} g^2} \in \mathbb{R} \Rightarrow k_z \geq \sqrt{\epsilon_{\perp} g^2 - (n/R)^2}, \\ \tilde{k}_{re} &= \sqrt{(\epsilon_{\parallel}/\epsilon_{\perp})k_z^2 + (n/R)^2 - \epsilon_{\parallel} g^2} \in \mathbb{R} \Rightarrow k_z \geq \sqrt{(\epsilon_{\perp}/\epsilon_{\parallel})(\epsilon_{\parallel} g^2 - (n/R)^2)}. \end{aligned} \quad (57)$$

Esto nos va a permitir abordar la búsqueda de soluciones de F_Y , y por tanto de F_H^- , de una forma más automatizada. A lo que nos referimos con esta búsqueda es a obtener las soluciones para un amplio rango de n y R .

El procedimiento se puede resumir en: dado un n y un R se calculan los k_z límite de \tilde{k}_r , \tilde{k}_{re} y \tilde{k}_{ro} , y se obtiene pues el k_z más restrictivo para que todas las ondas sean evanescentes. Una vez hecho esto, se procede a la obtención de la solución k_z^Y de F_Y . Ahora, dado que lo que buscamos es la automatización de este proceso, se realiza a través del método de bisección, en el que se va reduciendo el rango de k_z en el que se encuentra el cero de F_Y hasta obtener un k_z^Y .

satisfactorio. El parámetro que caracteriza este proceso lo denominamos n_{bisecc} y corresponde al número de bisecciones que se llevan a cabo antes de quedarnos con un valor de k_z . Se nombra aquí porque se observará la mejora de las soluciones ante el aumento de este parámetro. Una vez tenemos k_z^Y podemos aplicar el método del gradiente ya explicado para inferir k_z^H y comprobar así que $|F_H^-(k_z^H)| = 0$.

Para llevar a cabo una representación de lo comentado arriba tomaremos $n \in [0, 300]$ y $R \in (0, 400)$, con pasos de $\delta R = 1$ y, obviamente, $\delta n = 1$. Estudiaremos la solución que aparece para cada combinación válida de estos. En las Figs. (11a) y (11b) se muestra una comparativa para diferentes valores de n_{bisecc} y n_{pasos} .



(a) Representación del orden de $F_Y(k_z^Y)$ (en azul), $F_H^-(k_z^Y)$ (en rojo) y $F_H^-(k_z^H)$ (en verde) respecto al índice de la solución encontrada. Llevado a cabo con $n_{bisecc} = 20$ y $n_{pasos} = 0 + 1$.

(b) Representación del orden de $F_Y(k_z^Y)$ (en azul), $F_H^-(k_z^Y)$ (en rojo) y $F_H^-(k_z^H)$ (en verde) respecto al índice de la solución encontrada. Llevado a cabo con $n_{bisecc} = 50$ y $n_{pasos} = 8 + 1$.

Figura 11: Cada punto corresponde a la solución para un n y un R en el rango anterior.

Comparando ambas figuras se aprecia la mejora en las soluciones al aumentar tanto n_{bisecc} como n_{pasos} . Si se incrementa n_{bisecc} se observa como disminuye el orden de las soluciones encontradas $F_Y(k_z^Y) = 0$, e igualmente ocurre cuando se aumenta n_{pasos} para $F_H^-(k_z^H) = 0$. Además, se aprecia también que para este último caso, las soluciones que ya eran buenas permanecen aproximadamente en el mismo orden de magnitud (casos “buenos”, como $n = 200$ y $R = 175$) mientras que las que su orden de magnitud no era para nada aceptable mejoran considerablemente (casos “malos”, como $n = 200$ y $R = 216$).

Si queremos ver cómo se comportan las soluciones concretamente podemos tomar varios valores de n y estudiar k_z^H en función del n tomado y de los R que proporcionan solución. Esto se muestra en la Fig. (12). Se escogen 6 valores crecientes de izquierda a derecha de n y se observan las partes real e imaginaria de la solución k_z^H en función del radio R y de n . Se aprecia que para un n dado, tanto la parte real como la parte imaginaria de k_z^H aumentan conforme lo hace R , hecho que ya habíamos visto cuando comparábamos el caso $n = 200$ y $R = 175$ o $R = 216$.

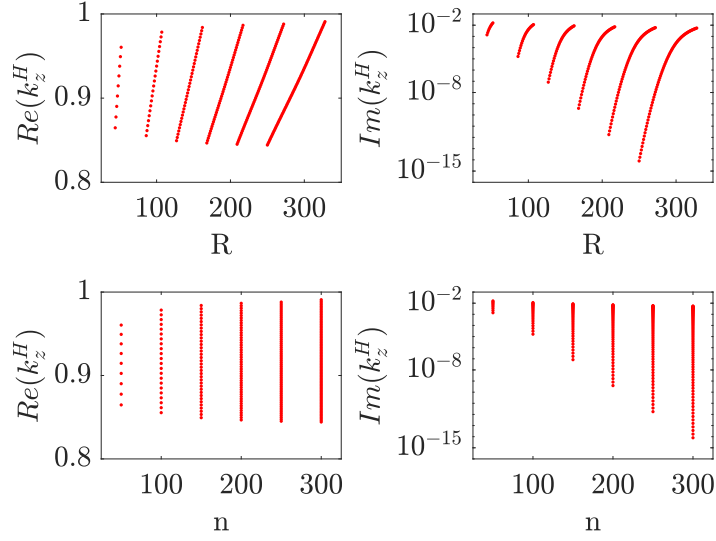


Figura 12: (Arriba) Representación de las partes real e imaginaria de k_z^H respecto de R para $n = 50, 100, 150, 200, 250, 300$, de izquierda a derecha. (Abajo) Representación de las partes real e imaginaria de k_z^H respecto de n para los R que presentan solución para $n = 50, 100, 150, 200, 250, 300$.

Otra posibilidad es representar los radios para los que hay soluciones dado un n . Esto se muestra en la Fig. (13).

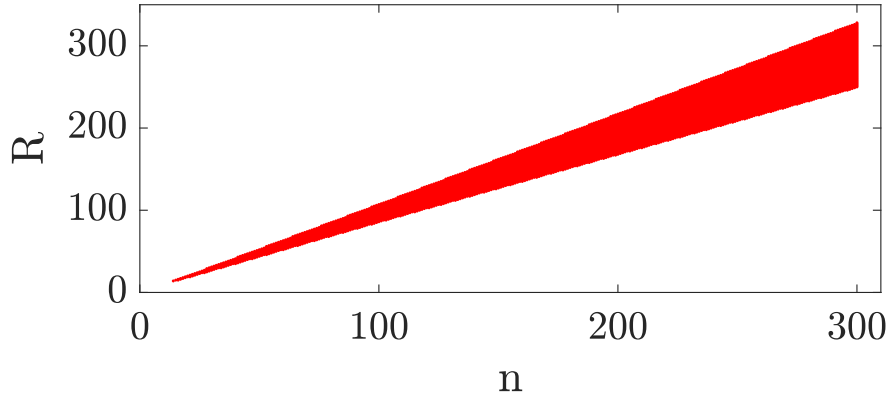
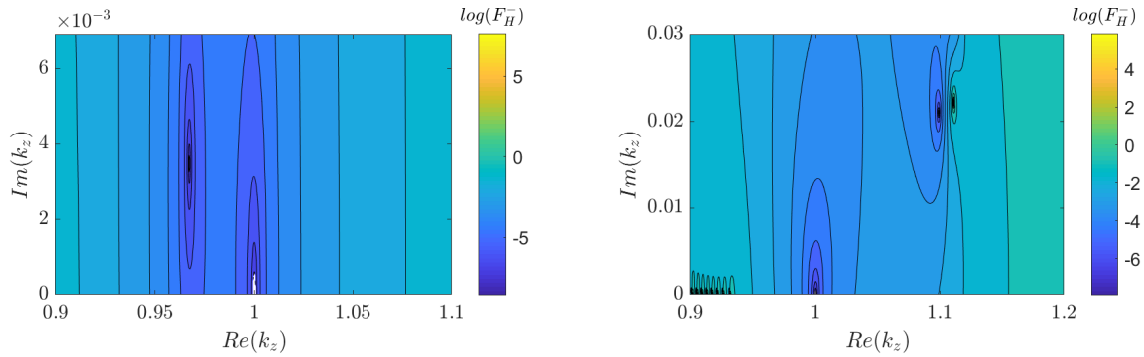


Figura 13: Representación de las combinaciones de R y n tales que existe solución k_z^H para la relación de dispersión F_H^- .

La forma que presenta nos recuerda al rango de ángulos que forman z e y en [3] para el que existen modos Dyakonov. Dado que k_y da cuenta de la relación entre n y R , esta figura podría tener una interpretación similar. Sin embargo, lo que más nos llama la atención de las Figs. (12) y (13) es que para un n fijo, existen dos valores de R para los que ya no existen soluciones, uno inferior y otro superior. Además, se aprecia también que en ningún caso la parte real de k_z^H supera la unidad.

Pensamos que un factor determinante en estas limitaciones es el método de obtención de soluciones utilizado. Creemos que el uso de la solución de F_Y como semilla para encontrar k_z^H restringe en cierta manera los valores que puede tomar este k_z^H y no nos permite encontrar soluciones válidas para radios mayores o menores dado un n , por ejemplo. Entonces, en lugar

de utilizar como semilla la solución de F_Y para cada búsqueda de k_z^H se plantea usar k_z^Y una única vez, para un valor de n y R donde conozcamos que la solución que genera el método del gradiente a partir de k_z^Y es válida. Si fijamos n , la elección del radio R de partida se realiza tal que R/n coincida con el valor de la bisectriz del ángulo que se forma en la Fig. (13). Tras obtener este primer k_z^H , nos olvidamos de F_Y y de k_z^Y , y pasamos a tomar como semilla para el siguiente radio $R + \delta R$ este k_z^H del radio R . Este procedimiento puede realizarse satisfactoriamente si se considera un δR adecuado, es decir, un δR que nos permita alcanzar la solución para el radio siguiente sin introducir errores debidos a estar una solución muy alejada de la otra, pues se sigue usando el método del gradiente. Así pues, realizando reiteradamente este proceso se consigue alcanzar la solución para un R' buscado, pudiendo ser mayor que el límite obtenido con el método anterior. Cabe destacar también que este proceso puede realizarse con un $\delta R < 0$ y obtener así soluciones para radios menores que el límite inferior. Un ejemplo del uso de este método se muestra en las Figs. (14a) y (14b).



(a) Representación del logaritmo del valor absoluto de F_H^- para un rango de combinaciones de k_z imaginario y k_z real. En cada gráfica se especifica el n y el R utilizados. Se ha trabajado con $n = 228$ y $R = 240$.

(b) Representación del logaritmo del valor absoluto de F_H^- para un rango de combinaciones de k_z imaginario y k_z real. En cada gráfica se especifica el n y el R utilizados. Se ha trabajado con $n = 228$ y $R = 295$.

Figura 14

En la Fig. (14a) la solución corresponde a la aglomeración de líneas de contorno que se produce a la izquierda de $k_z = 1$, aunque su observación resulta difícil debido al grosor de estas líneas. Por otro lado, en la Fig. (14b) la solución corresponde a, de la pareja de aglomeraciones de líneas de contorno que se tiene a la derecha de $k_z = 1$, la de la izquierda. La de la derecha es en realidad un polo, se tendría que ver en amarillo, pero el grosor de las líneas de contorno imposibilita esta apreciación. Se observa como la solución se va desplazando hacia valores más grandes, tanto reales como imaginarios conforme se aumenta el radio del cilindro. Atraviesa incluso el valor $Re(k_z^H) = 1$ que habíamos visto que no se alcanzaba en la Fig. (12). También se aprecian las soluciones de ondas propagantes en la región inferior izquierda de la Fig. (14b). En esta misma figura el $k_z = 1$ no corresponde a una solución sino que ocurre lo mismo que en la Fig. (14a), F_H^- diverge, pero no se ve porque lo tapa el señalizador del eje. Cabe destacar que para $n = 228$ se había obtenido un radio máximo de $R = 248$ con el método anterior mientras que ahora se encuentran soluciones para $R = 295$, sin suponer este siquiera un valor límite. Así pues, confirmamos que el método de seguir el gradiente partiendo de k_z^Y presenta limitaciones y que una forma de evitarlas es utilizar el proceso reiterativo explicado anteriormente en el que se usa la solución k_z^H del radio anterior como semilla.

Conclusiones

A lo largo de este Trabajo de Fin de Grado se ha abordado el problema de la aparición de modos localizados en la interfase cilíndrica entre dos medios dieléctricos, uno anisótropo y otro isotrópico. Para llevar a cabo este estudio se han utilizado tanto métodos analíticos como numéricos. Analíticamente se ha obtenido la relación de dispersión del sistema y se han realizado diversas aproximaciones, como las expansiones asintóticas de Debye. Por otro lado, numéricamente se han explorado los diferentes puntos de este trabajo, como la representación de los campos electromagnéticos.

La aproximación de la relación de dispersión del cilindro a un plano ha sido satisfactoria, confirmando así la validez de esta y proporcionándonos un punto de partida para seguir avanzando. Tras esto, se ha llevado a cabo la búsqueda de la solución de la relación de dispersión para una caso concreto de n y R . Al centrarnos en la solución que nos interesa, la correspondiente a ondas evanescentes, nos damos cuenta de que no corresponde a modos propios y que por tanto, no existen modos Dyakonov en superficies cilíndricas. Sin embargo, hemos encontrado una solución de los campos que, aunque no cumplen las condiciones de contorno en $r \rightarrow \infty$, siguen presentando interés pues los modos impropios a los que hace referencia constituyen un herramienta útil en los cálculos de excitaciones de modos a través de fuentes localizadas. Este tipo de ondas se denominan *Leaky waves*.

Cuando pasamos a estudiar el comportamiento de los campos electromagnéticos en función de la coordenada radial se obtuvieron varios resultados importantes. Se encontró que si nos situábamos cerca de la superficie del cilindro se observaba un decaimiento típico de una superficie plana, y que si nos alejábamos lo suficiente la situación era similar a considerar el cilindro como una fuente puntual. Para finalizar se refinó y automatizó el método de búsqueda de soluciones, que proporciona soluciones válidas pero presenta ciertas limitaciones.

Pese al amplio estudio que se ha llevado a cabo se han quedado en el tintero varios temas interesantes que nos permitirían continuar explorando este problema. Se podría excitar el sistema con una fuente puntual, por ejemplo, y estudiar la excitación de las *Leaky waves* que hemos encontrado. Otra posibilidad sería caracterizar el comportamiento de los campos electromagnéticos en el interior del cilindro, pues simplemente se ha atendido a que decaen muy rápidamente. En relación a esto, habría que analizar también qué sucede en el interior del cilindro cuando la longitud típica de decaimiento es del orden del radio del cilindro. También, como ya se adelantaba al encontrar las limitaciones del método de búsqueda, habría que explorar el rango en el que aparecen soluciones cuando el método de búsqueda utilizado corresponde al uso de k_z^H como semilla, y analizar el comportamiento de los campos electromagnéticos en estas situaciones.

Bibliografía

- [1] Stefan A. Maier. *Plasmonics: Fundamentals and Applications*. Springer US, 2007. DOI: [10.1007/0-387-37825-1](https://doi.org/10.1007/0-387-37825-1).
- [2] Heinz Raether. *Surface Plasmons on Smooth and Rough Surfaces and on Gratings*. Springer Berlin Heidelberg, 1988. DOI: [10.1007/bfb0048317](https://doi.org/10.1007/bfb0048317).
- [3] MI D'yakonov. "New type of electromagnetic wave propagating at an interface". En: *Sov. Phys. JETP* 67.4 (1988), págs. 714-716.
- [4] George B. Arfken, Hans J. Weber y Frank E. Harris. "Chapter 14 - Bessel Functions". En: *Mathematical Methods for Physicists (Seventh Edition)*. Seventh Edition. Academic Press, 2013.
- [5] Vladyslav A. Golyk, Matthias Krüger y Mehran Kardar. "Heat radiation from long cylindrical objects". En: *Physical Review E* 85.4 (2012). DOI: [10.1103/physreve.85.046603](https://doi.org/10.1103/physreve.85.046603).
- [6] Julius Adams Stratton. *Electromagnetic theory / by Julius Adams Stratton*. 1st ed. McGraw-Hill New York, 1941.
- [7] L. Tsang, J. A. Kong y K.-H. Ding. *Scattering of Electromagnetic Waves, Theories and Applications*. 2000.
- [8] John David Jackson. *Classical electrodynamics*. 3rd ed. Wiley, 1999.
- [9] S. N. Samaddar. "Scattering of plane waves from an infinitely long cylinder of anisotropic materials at oblique incidence with an application to an electronic scanning antenna". En: *Applied Scientific Research, Section B* 10.5 (1962), págs. 385-411. DOI: [10.1007/BF02923451](https://doi.org/10.1007/BF02923451).
- [10] A. Yu. Nikitin y col. "Polarization conversion spectroscopy of hybrid modes". En: *Opt. Lett.* 34.24 (2009), págs. 3911-3913. DOI: [10.1364/OL.34.003911](https://doi.org/10.1364/OL.34.003911).
- [11] Milton Abramowitz e Irene A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. ninth Dover printing, tenth GPO printing. Dover, 1964.
- [12] T. Tamir y A. A. Oliner. "Guided complex waves. Part 1: Fields at an interface". En: *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers* 110.2 (feb. de 1963), págs. 310-324. ISSN: 0020-3270. DOI: [10.1049/piee.1963.0044](https://doi.org/10.1049/piee.1963.0044).
- [13] K.A. Michalski y J.R. Mosig. "The Sommerfeld half-space problem revisited: from radio frequencies and Zenneck waves to visible light and Fano modes". En: *Journal of Electromagnetic Waves and Applications* 30.1 (2016), págs. 1-42. DOI: [10.1080/09205071.2015.1093964](https://doi.org/10.1080/09205071.2015.1093964).